rref 唯一性证明:

归纳法: 对 n 作归纳.

(*) 行变换将零矩阵变成零矩阵, 行变换可逆,
所以行变换将非零矩阵变成非零矩阵.

$n=1$. rref 只有两种 $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

由 (*) $\Rightarrow$ rref 由 A 是否为零矩阵决定.

假设对 n 成立. $A=(B\ y)$ 行变换得到

rref $A'=(B'\ y')$, 或者 $A''=(B''\ y'')$

则 B', B'' 是由 B 经行变换得到, 且都是 rref.

所以 $B'=B''$

考虑, 线性方程组 $B\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=y$.

得到等价于方程组 $B'\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=y'$

或者 $B''\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=y''$

情形 1. 无解, (Inconsistent)

则 $A'=\left(\begin{array}{c|c} * & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right)=A''$

情形2. 有解. 假设主元在 $i_1, i_2, \cdots i_r$ 个位置

$$
\begin{array}{cccccc}
 & i_1\text{列} & & i_2\text{列} & i_r\text{列} & \\
\end{array}
\left(\begin{array}{cccccc}
0 & 1 & * & * & & y_1' \\
 & 0 & & 1 & & y_2' \\
 & \vdots & & & & \vdots \\
 & & & & 1 & y_r' \\
 & 0 & & & & 0 \\
 & & & & & \vdots \\
 & & & & & 0
\end{array}\right)
\quad \text{或者} \quad
\begin{array}{cccc}
i_1\text{列} & i_2\text{列} & i_r\text{列} & \\
\end{array}
\left(\begin{array}{ccccccc}
0 & 0 & 1 & * & * & & y_1'' \\
 & & 0 & 0 & 0 & 1 & y_2'' \\
 & & \vdots & & & & \vdots \\
 & & & & & 1 & y_r'' \\
 & & 0 & & & & 0 \\
 & & & & & & \vdots \\
 & & & & & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

(等价于去掉自由元所在的列)

令自由元均取0，则得到关于 $x_{i_1}, \cdots x_{i_r}$ r个未知元的线性方程组，有唯一解.

$x_{i_1}=y_1'$, $x_{i_2}=y_2'$, $\cdots$ $x_{i_r}=y_r'$

或者 $x_{i_1}=y_1''$, $x_{i_2}=y_2''$, $\cdots$ $x_{i_r}=y_r''$

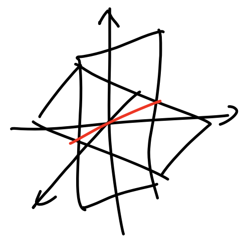
所以 $y_1'=y_1''$, $y_2'=y_2''$, $\cdots$ $y_r'=y_r''$.

解集一样是否有相同的 rref ?

(作业题，需要详细步骤)

$\mathbb{R}^3$ 中　A　2×3，　$Ax=0$

\# of pivots in $\mathrm{rref}(A)=2$



通过原点的直线.

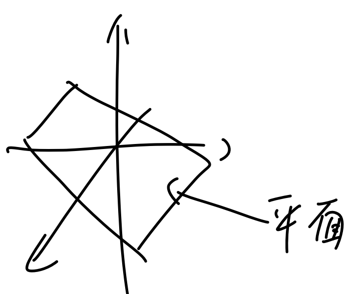
$\mathrm{rref}(A)$ 的可能性有如下

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

所以 $\mathbb{R}^3$ 中通过原点的直线的集合，记为 $G(1,3)$

$$G(1,3) \xleftarrow{1:1\text{对应}} \underset{\binom{a_1}{a_2}}{\mathbb{R}^2} \sqcup \underset{b_1}{\mathbb{R}^1} \sqcup \underline{\mathbb{R}^0} \leftarrow \text{单点集.}$$

$\mathbb{R}^3$ 中考虑 $Ax=0$.　　$\mathrm{rk}\, A=1$.



$\mathbb{R}^3$ 中通过原点的平面的集合 $G(2,3)$

$\mathrm{rref}(A) = (1\ a_1\ a_2)$，$(0\ 1\ b)$，

$(0,0,1)$

也 1-1 对应于 $\mathbb{R}^2 \sqcup \mathbb{R}^1 \sqcup \mathbb{R}^0$

$\mathbb{R}^4$ 中　$Ax=0$　$\mathrm{rk}\, A=2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_1 & a_2 \\ & 1 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & b_1 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & c_1 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G(2,4) \xleftrightarrow{1:1\text{对应}} \mathbb{R}^4 \sqcup \mathbb{R}^3 \sqcup \mathbb{R}^2 \sqcup \mathbb{R}^2 \sqcup \mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}^0$$

计算 $G(m,n)$ 这种分解中每一个 $\mathbb{R}^i$ 的个数 b_i

生成函数 $\sum_{i=0}^{m(n-m)} b_i t^i$

验证: b_i palindromic 反序对称。

矩阵的运算

$\{A$ $m\times n$ 实矩阵. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & & a_{mn} \end{pmatrix}$ $\Big|$ $a_{ij}\in\mathbb{R}\}$

$= M_{m\times n}(\mathbb{R})$ 也记为 $A=(a_{ij})_{m\times n}$

元素全部为 0 定义为 $O_{m\times n}$ $m\times n$ 阶矩阵

$m=n$. 称为方阵.

$M_{m\times n}$ 上的运算.

① 加法. $A=(a_{ij})_{m\times n}$. $B=(b_{ij})_{m\times n}$.

$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$.

$c\in\mathbb{R}$

② 数乘 $c\cdot A=(c\,a_{ij})_{m\times n}$.

满足通常 $\mathbb{R}^{mn}$ 中加法与数乘运算规律.

额外的结构. 乘法:

已经见到过的乘法例子:

$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$ 或者 $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ $A=\begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$

$A\cdot x$ 定义为 $x_1v_1+x_2v_2+\cdots+x_nv_n$ $v_i\in\mathbb{R}^m$

也即以 $x_1, x_2 \ldots x_n$ 为系数的 A 中列向量 $v_1, v_2 \ldots v_n$ 的线性组合. linear combination.

回忆线性组合的定义：

定义：$v_1, v_2, \cdots, v_n \in \mathbb{R}^m$，$c_1, \cdots c_n \in \mathbb{R}$，

则 $c_1v_1 + \cdots + c_nv_n$ 称为以 $c_1, \cdots c_n$ 为系数的 $v_1, v_2 \cdots v_n$ 的线性组合。

定义：$A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$，$B \in M_{n\times l}(\mathbb{R})$，

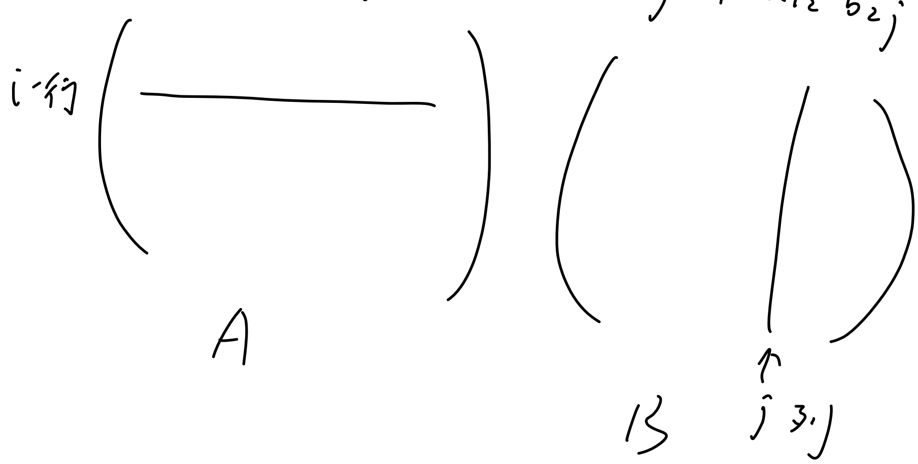
$B = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ w_1 & w_2 & \cdots & w_l \\ | & | & & | \end{pmatrix}$，$AB$ 定义为

$$(Aw_1, Aw_2, \cdots, Aw_l)$$

或者 $A = (a_{ij})_{m\times n}$，$B = (b_{ij})_{n\times l}$

则 $AB = (c_{ij})_{m\times l}$。

其中 $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$



写下 $A\cdot B$ 时，即需满足 A列数 = B行数，否则无定义。例如 $A \in M_{2\times 3}$，$B \in M_{3\times 4}$，AB 有定义，BA 无定义。

另一种观点：$B = \begin{pmatrix} -v_1- \\ -v_2- \\ \vdots \\ -v_n- \end{pmatrix}$ $v_i \in M_{1\times l}$ 行向量。

可验证 $[a_1\ a_2\ \cdots\ a_n]\ B = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$

行向量的线性组合.

$$A = \begin{pmatrix} - w_1 - \\ - w_2 - \\ \vdots \\ - w_m \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} w_1 B \\ w_2 B \\ \vdots \\ w_m B \end{pmatrix}$$

AB 的第 i 行是以 w_i 的元素为系数的 B 的行向量的线性组合.

结合律: $A \in M_{m\times n}$, $B \in M_{n\times l}$, $C \in M_{l\times k}$.

$$(AB)C = A(BC)$$

为什么?

证明: $C = (w_1\ w_2\ \cdots\ w_k)$

$$(AB)C = ((AB)w_1, (AB)w_2, \cdots (AB)w_k)$$

$$A(BC) = A(Bw_1, Bw_2, \cdots Bw_k)$$

$$= (A(Bw_1), A(Bw_2), \cdots A(Bw_k))$$

则只需验证 $k=1$ 的情形, $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_l \end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix} -u_1- \\ -u_2- \\ \vdots \\ -u_m- \end{pmatrix}$$ m个行向量.

$$(AB)C=\begin{pmatrix} u_1B \\ u_2B \\ \vdots \\ u_mB \end{pmatrix}\cdot C=\begin{pmatrix} (u_1B)C \\ (u_2B)C \\ \vdots \\ (u_mB)C \end{pmatrix}$$

$$A(BC)=\begin{pmatrix} u_1(BC) \\ \vdots \\ u_m(BC) \end{pmatrix}.$$

只需验证 $m=1$. $A=(a_1\cdots a_n)$ $B=(b_{ij})$, $C=\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_l \end{pmatrix}$

$$\left((a_1\cdots a_n)\cdot B\right)\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_l \end{pmatrix}=\sum_{j=1}^{l}\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_{ij}\right)c_j$$

$$(a_1\cdots a_n)\cdot\left(B\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_l \end{pmatrix}\right)=\sum_{i=1}^{n}a_i\left(\sum_{j=1}^{l}b_{ij}c_j\right)$$

$$=\sum_{i,j}(a_ib_{ij}c_j)$$

对B作行组合和列组合两种操作是交换的.

乘法与加法、数乘之间的运算规律

- $(A+B)\cdot C = AC+BC$
- $A(B+C) = AB+AC$
- $c(AB) = (cA)\cdot B = A\cdot(c\cdot B)$

乘法与行变换的关系：

基础行变换之后，每一行仍然是原来的行的线性组合，(⇒ 所有行变换之后都是)

每一行的线性组合系数拿出来作为矩阵，左乘

例如 (E3) $\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{matrix}$ 变成 $\begin{matrix} r_1+2r_3 \\ r_2 \\ r_3 \end{matrix}$

则 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A$ 是对 A 作 (E3) 操作的结果.

基础行变换会有以下几种矩阵表达

(E1):

$$\begin{array}{r} \\ \\ i行\rightarrow \\ \\ j行\rightarrow \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \\ 交换\ i,j \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & & j列 \\ & i行 & \end{array}$$

(E2)

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & c & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$c \neq 0$

i行乘以c.

(E3):

$$\begin{array}{r} \\ i行\rightarrow \\ \\ \\ j行\rightarrow \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & a & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

第j行乘以a
加到第i行

以上定义为初等矩阵.

性质：对 $A\in M_{m\times n}$ 作基础行变换 ^{O} 等价于左乘相应的初等矩阵 B

推论：对 A 作行变换 $^{O_1\cdots O_k}$，等价于左乘初等矩阵的乘积 $B_k\cdots B_2B_1$

基础行变换是可逆的，例如：

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & -a & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}}_{B_2}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & a & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}}_{B_1} A = A$$

或者 $(B_2B_1)A=A$.

有矩阵 I_m，使得 $I_m\cdot A=A$ 成立.

I_m 第 i 行的系数为 $(0,0,\cdots,\underset{\substack{\uparrow\\ i\text{列}}}{1},0\cdots 0)$

考虑单位元. $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$

$A \in M_{m\times n}$, 则 $A \cdot I_n = A$.

$I_m A = A$.

考虑 乘法 逆元

定义: $A \in M_{n\times n}$,

若有 ① B, 使得 $BA = I_n$. 称 B 为 A 的左逆

② C, 使得 $AC = I_n$. 称 C 为 A 的右逆.

③ 若左逆, 右逆均存在, 称为 A 可逆.

定理: 以下等价. ⓪ A 可逆.

① A 存在左逆.

② A 存在右逆.

③ $\mathrm{rref}(A) = I_n$

④ $Ax = b$ 有唯一解

⑤ $Ax = 0$ 有唯一解.

⑥ # of pivots in rref $= n$

上次 ④ $\Leftrightarrow$ ⑤ $\Leftrightarrow$ ⑥. ③ $\Leftrightarrow$ ⑥ 由于每行每列均有pivot. 只能是在对角. (严格位置关系)

① ⇒ ⑤. $Ax=0$, 则 $(BA)x=0$

⇒ $x=0$.

④ ⇒ ②. $AC=I$ ⇔ $A\cdot(w_1, w_2 \cdots w_n)=I$.

即 $Aw_1=\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$, $Aw_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$ ...

② ⇒ ①. $AC=I$ ⇒ $(CA)C=C$

而另一方面 C 存在左逆，所以 C 存在右逆 D.

$$(CA)(CD^{-1}) = C\cdot D^{-1} \Rightarrow CA=I.$$

同时，这也证明了A的右逆 C 同时也是 A 的左逆.

定理：若 A 可逆，则左逆，右逆均唯一且相同.(定义为 A 的逆，记作 A^{-1}

证明：$B_1A=B_2A=I$.

则 $B_1(AC)=B_2(AC)=C$

已知逆可求解方程 $Ax=b$. $x=A^{-1}b$